

Проблемы техновещества и энергии

УДК 536:539.1

В.А. Чугунов, А.А. Липаев, В.А. Королев

ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ПО ПРОСТРАНСТВУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В СИСТЕМЕ КОНТАКТИРУЮЩИХ ТЕЛ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ

Аннотация. В статье моделируется процесс переноса тепла теплопроводностью в системе из трех контактирующих тел. Подобная схема часто применяется для определения тепловых свойств различных материалов. При этом используются одномерные по пространству математические модели для обработки экспериментальных данных, которые не всегда адекватно описывают физику процесса. В данной работе формулируется физико-математическая модель, которая учитывает возможную неоднородность процесса переноса тепла в рассматриваемой системе. Показана ее связь с ранее известной моделью и разработан эффективный алгоритм реализации построенной модели. В результате вычислительных экспериментов даны рекомендации по устранению недостатков ранее известной модели. Отмеченное позволит повысить точность определения коэффициентов теплопроводности, температуропроводности, а также теплоемкости материалов.

Ключевые слова: математическая модель, нагреватель, теплоперенос, теплообмен, коэффициент теплопроводности, коэффициент температуропроводности, теплоемкость, материалы.

Для цитирования: Чугунов В.А., Липаев А.А., Королев В.А. Оценка возможности применения одномерной по пространству математической модели теплопереноса в системе контактирующих тел для определения тепловых свойств материалов // Управление техносферой: электрон. журнал. 2018. Т.1. Вып. 2. С. 209 – 245. URL: <http://f-ing.udsu.ru/technosphere>

Введение

Для решения задач энергосбережения в технических системах и мониторинга окружающей среды важное значение имеет определение тепловых свойств материалов. Совершенствование методики и измерительных средств

экспериментального измерения коэффициентов тепло- и температуропроводности, а также теплоемкости различных веществ в этой связи весьма актуально.

В монографии [1] описана модель и установка для определения тепловых свойств различных материалов на основе регулярного теплового режима третьего рода в системе контактирующих тел, из которых два имеют одинаковые физические свойства [4]. В работах [2, 3] было предложено обобщение этой модели и установки на случай определения тепловых свойств, при наличии фильтрационного потока, и сделана попытка учесть потери тепла с поверхности контактирующих тел, имеющих различные физические (тепловые) свойства. Если предположить отсутствие фильтрационного потока, то в основе этого прибора лежит следующая схема процесса переноса тепла. Образец исследуемого материала в форме цилиндрической пластины диаметра $2r_0=25-30$ мм и толщиной $L=20$ мм помещается между двумя полуограниченными телами (их длина должна быть значительно больше, чем глубина проникновения температурных возмущений) с известными тепловыми свойствами, а источник тепла задается на границе сопряжения одного из полуограниченных тел с образцом.

На рис.1 изображена принципиальная схема системы трех контактирующих тел, в которых осуществляется процесс переноса тепла теплопроводностью. На этом рисунке:

- 1, 3 – эталонные тела с известными свойствами;
- 2 – опытный образец;
- 4 – нагревающее устройство, обеспечивающее равномерный нагрев по всей поверхности сопряжения с исследуемым образцом.

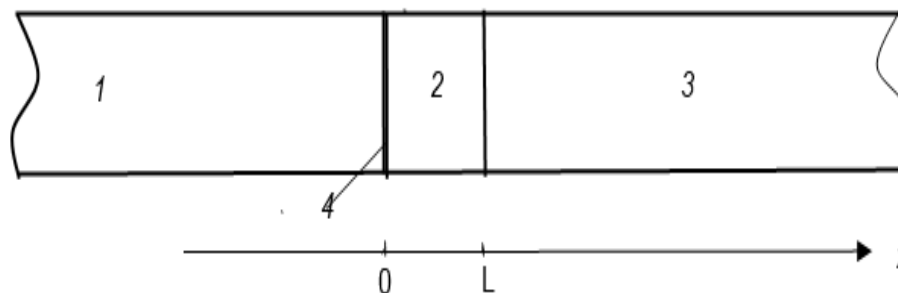


Рис.1. Принципиальная схема трех контактирующих тел

Если боковая поверхность системы цилиндрических тел идеально теплоизолирована, то в данной системе реализуется процесс распространения тепла вдоль одной пространственной переменной x , что и предполагалось в первых работах, использующих данную схему для определения тепловых свойств материалов. Однако в реальных условиях проведения экспериментов обеспечить идеальную теплоизоляцию невозможно. Особенно в условиях учета влияния давления на тепловые характеристики исследуемого образца. Поэтому в работе [2] сделана попытка учесть влияние наличия теплообмена рассматриваемой системы тел с окружающей ее средой, но в рамках одномерной по пространству математической модели. В определенных ситуациях такой подход может привести к существенным ошибкам при определении тепловых характеристик исследуемого материала. Действительно, приводимая в работах [2, 3] математическая модель должна рассматриваться лишь как модель, определяемая средней по сечению цилиндрического тела температурой, которая, в общем случае, не равна температуре в отдельно взятой точке того же сечения. Кроме того, сама модель по определению средней по сечению температуры содержит некоторую погрешность, связанную с предположением о том, что температура боковой поверхности системы цилиндрических тел равна средней по сечению температуре. Таким образом, при интенсивном теплообмене данной системы тел с окружающей средой

температурные градиенты по радиусу могут оказаться сравнимыми с температурными градиентами по пространственной переменной x , и в этом случае температурное поле системы становится зависимым как от переменной x , так и от второй пространственной переменной r . Именно в этой ситуации проявляются в значительной степени описанные выше эффекты неоднородности, которые приводят к тому, что показания датчиков температуры могут существенно отличаться от теоретических значений температуры, рассчитанные по модели работ [2, 3]. С целью оценки эффектов неоднородности и возможности их учета в данной работе рассматривается полная математическая модель, учитывающая перенос тепла теплопроводностью и по пространственной переменной x , и по r . Следует отметить, что название «Полная математическая модель» следует понимать в том смысле, что она учитывает неоднородность и теплообмен с окружающей средой. Влияние тепловых сопротивлений, возникающих из-за неидеальных контактов исследуемого образца с эталонными телами, в данной работе не рассматривается. Это связано с тем, что упомянутая проблема была подробно рассмотрена в работе [9].

2. Математические модели и их обсуждение

Очевидно, что процесс переноса тепла теплопроводностью в рассматриваемой системе тел осуществляется вдоль оси этой системы, которая совмещена с осью x и по радиусу r . Учитывая сказанное, выпишем систему уравнений, определяющую температурное поле во всех трех телах:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} = a_1 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t_1}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 t_1}{\partial x^2} \right], -\infty < x < 0, 0 < r < r_0, \tau > 0; \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} = a_2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 t_2}{\partial x^2} \right], 0 < x < L, 0 < r < r_0, \tau > 0; \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial t_3}{\partial \tau} = a_3 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t_3}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 t_3}{\partial x^2} \right], L < x < \infty, 0 < r < r_0, \tau > 0; \quad (2.3)$$

$$\tau = 0, t_k = t_0, k = 1,2,3; \quad (2.4)$$

$$r \rightarrow 0, r \frac{\partial t_k}{\partial r} \rightarrow 0; \quad k = 1,2,3; \quad (2.5)$$

$$r = r_0, -\lambda_k \frac{\partial t_k}{\partial r} = \alpha(t_k - t_0); \quad k = 1,2,3; \quad (2.6)$$

$$x = 0, t_1 = t_2, \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} + q(\tau), \quad 0 < r < r_0, \tau > 0; \quad (2.7)$$

$$x = L, t_2 = t_3, \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial x} = \lambda_3 \frac{\partial t_3}{\partial x}, \quad 0 < r < r_0, \tau > 0; \quad (2.8)$$

$$x \rightarrow \pm\infty, t_1 - t_0 \rightarrow 0, \quad t_3 - t_0 \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Здесь t_k – температура в k -том теле; x, r – пространственные переменные; τ – время; L – длина исследуемого образца; a_k, λ_k – температуропроводность и теплопроводность k – тела; α – коэффициент теплопередачи; r_0, S – радиус и площадь поперечного сечения контактирующих тел; t_0 – температура окружающей среды; $q(\tau)$ – заданный тепловой поток от нагревателя, $q(\tau) = N/S$; N – мощность нагревателя.

В системе (2.1)-(2.9) перейдем к безразмерным переменным вида

$$\theta_k = \lambda_3 \frac{t_k - t_0}{Lq_0^*}; \quad X = \frac{x}{L}; \quad Fo = \frac{\tau a_3}{L^2}; \quad Q = \frac{q}{q_0^*}; \quad R = \frac{r}{r_0}; \quad \Lambda_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_3}; \quad (2.10)$$

$$A_k = \frac{a_k}{a_3}; \quad \nu = \frac{\alpha PL^2}{\lambda_3 S}; \quad K_L = \frac{L}{r_0}; \quad B_k = \frac{\nu}{2\Lambda_k K_L^2}, \quad (2.10')$$

где $q_0^* = N_0/S$ – характерная величина теплового потока; P – периметр поперечного сечения контактирующих тел. В результате получаем

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial Fo} = A_k \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta_k}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial X^2} \right], \quad k = 1,2,3; \quad 0 < R < 1, \quad Fo > 0; \quad (2.11)$$

$$Fo = 0, \quad \theta_k = 0, \quad k = 1,2,3; \quad Fo > 0; \quad (2.12)$$

$$R \rightarrow 0, \quad R \frac{\partial \theta_k}{\partial R} \rightarrow 0; \quad k = 1,2,3; \quad Fo > 0; \quad (2.13)$$

$$R = 1, \quad \frac{\partial \theta_k}{\partial R} + B_k \theta_k = 0; \quad k = 1,2,3; \quad Fo > 0; \quad (2.14)$$

$$X = 0, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \Lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial X} = \Lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial X} + Q(Fo), \quad 0 < R < 1, \quad Fo > 0; \quad (2.15)$$

$$X = 1, \theta_2 = \theta_3, \Lambda_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial X} = \Lambda_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial X}, \quad 0 < R < 1, Fo > 0; \quad (2.16)$$

$$X \rightarrow \pm\infty, \theta_1 \rightarrow 0, \quad \theta_3 \rightarrow 0, \quad 0 < R < 1, Fo > 0. \quad (2.17)$$

В работах [2, 3] вместо системы (2.11)-(2.17) рассматривалась более простая система уравнений, которая не содержит пространственную переменную R . Следует отметить, что упомянутая система уравнений может быть получена из приведенной системы (2.11)-(2.17). Для обоснования возможности применения математической модели работы [2, 3] целесообразно установить связь между обсуждаемыми моделями.

Введем в рассмотрение среднюю по сечению контактирующих тел безразмерную температуру

$$\langle \theta_k \rangle = 2 \int_0^1 R \theta_k(Fo, R, X) dR, \quad k = 1, 2, 3. \quad (2.18)$$

Умножая систему уравнений (2.11), (2.12), (2.15), (2.16), (2.17) на $2R$, интегрируя от 0 до 1 по переменной R и принимая во внимание определение (2.18) и граничные условия (2.13), (2.14), получаем

$$\frac{\partial \langle \theta_k \rangle}{\partial Fo} = A_k \left[\frac{\partial^2 \langle \theta_k \rangle}{\partial X^2} - \frac{\nu}{\Lambda_k} (\theta_k)_{R=1} \right], \quad k = 1, 2, 3; \quad Fo > 0; \quad (2.19)$$

$$Fo = 0, \langle \theta_k \rangle = 0, \quad k = 1, 2, 3; \quad Fo > 0; \quad (2.20)$$

$$X = 0, \langle \theta_1 \rangle = \langle \theta_2 \rangle, \Lambda_1 \frac{\partial \langle \theta_1 \rangle}{\partial X} = \Lambda_2 \frac{\partial \langle \theta_2 \rangle}{\partial X} + Q(Fo), \quad Fo > 0; \quad (2.21)$$

$$X = 1, \langle \theta_2 \rangle = \langle \theta_3 \rangle, \Lambda_2 \frac{\partial \langle \theta_2 \rangle}{\partial X} = \Lambda_3 \frac{\partial \langle \theta_3 \rangle}{\partial X}, \quad Fo > 0; \quad (2.22)$$

$$X \rightarrow \pm\infty, \langle \theta_1 \rangle \rightarrow 0, \quad \langle \theta_3 \rangle \rightarrow 0, \quad Fo > 0. \quad (2.23)$$

Задача (2.19)-(2.23) становится замкнутой, если известна связь температуры на внешней поверхности контактирующих тел со средней по сечению температурой. Одно из возможных предположений – допущение о том, что температура на внешней поверхности контактирующих тел приближенно равна средней по сечению температуре, то есть

$$(\theta_k)_{R=1} = \langle \theta_k \rangle. \quad (2.24)$$

Именно это предположение и реализовано в работах [2, 3]. Естественно, возникает вопрос о правомерности этого допущения. Кроме того, даже если удастся замкнуть систему (2.19)-(2.23) и найти ее решение, то возможность использовать это решение для определения тепловых свойств остается неясной. Это объясняется тем, что в эксперименте определяется температура в определенной точке эталонного тела, а решение системы (2.19)-(2.23) дает среднюю по сечению температуру, которая, в общем случае, не совпадает с температурой в некоторой заданной точке сечения. Ясно, что для ответа на поставленные вопросы достаточно решить задачу в полной постановке – (2.11)-(2.17). Однако для анализа экспериментальных данных удобнее воспользоваться решением более простой задачи-(2.19)-(2.23). В этом случае необходимо выработать рекомендации, устраняющие вышеотмеченные недостатки упрощенной модели.

3. Реализация математических моделей и анализ решений

При реализации математических моделей, по возможности, следует стремиться к аналитическим решениям. Это связано с тем, что аналитические формулы значительно проще анализировать и удобнее использовать для решения обратных задач, к которым относятся задачи определения тепловых свойств материалов.

Рассматриваемые системы уравнений (2.11)-(2.17) и (2.19)-(2.23) являются линейными, поэтому достаточно найти решение для $Q(Fo)=1$, а случай $Q=Q(Fo)$ реализуется на основе принципа Дюамеля [5]. Кроме того, следует подчеркнуть, что произвольная периодическая функция $Q(Fo)$ может быть представлена своим рядом Фурье, а тогда, пользуясь принципом суперпозиции, можно построить решения рассматриваемых задач, зная решения для $Q(Fo)=1$, для $Q(Fo)=\cos(\Omega Fo)$ и для $Q(Fo)=\sin(\Omega Fo)$.

3.1. Реализация полной математической модели

Для решения проблемы (2.11)-(2.17) при $Q(Fo)=1$ воспользуемся преобразованием Лапласа [5] по переменной Fo в сочетании с методом Галеркина [6].

Обозначим

$$\Theta_k(s, R, X) = \int_0^\infty \theta_k(Fo, R, X) e^{-st} dFo, \quad (3.1)$$

где s – комплексный параметр преобразования Лапласа.

Применяя преобразование Лапласа к системе (2.11)-(2.17), находим

$$\frac{s\Theta_k}{A_k} = \left[\frac{K_L^2}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Theta_k}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Theta_k}{\partial X^2} \right], \quad k = 1, 2, 3; \quad 0 < R < 1, \quad (3.2)$$

$$R \rightarrow 0, \quad R \frac{\partial \Theta_k}{\partial R} \rightarrow 0; \quad k = 1, 2, 3; \quad (3.3)$$

$$R = 1, \quad \frac{\partial \Theta_k}{\partial R} + B_k \Theta_k = 0; \quad k = 1, 2, 3; \quad (3.4)$$

$$X = 0, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad \Lambda_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} = \Lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial X} + \frac{1}{s}, \quad 0 < R < 1; \quad (3.5)$$

$$X = 1, \quad \Theta_2 = \Theta_3, \quad \Lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial X} = \Lambda_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial X}, \quad 0 < R < 1; \quad (3.6)$$

$$X \rightarrow \pm\infty, \quad \Theta_1 \rightarrow 0, \quad \Theta_3 \rightarrow 0, \quad 0 < R < 1. \quad (3.7)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции

$$\Theta_{jk} = (a_{jk} e^{\chi_{jk} X} + b_{jk} e^{-\chi_{jk} X}) J_0(\mu_{jk} R) \quad (3.8)$$

удовлетворяют уравнениям (3.2) при любом значении индекса k . В равенство (3.8) входят следующие величины:

$J_0(\mu_{jk} R)$ – функция Бесселя нулевого порядка первого рода, μ_{jk} – корни уравнения

$$\mu_{jk} J_1(\mu_{jk}) - B_j J_0(\mu_{jk}) = 0, \quad (3.9)$$

$J_1(\mu_{jk})$ – функция Бесселя первого порядка первого рода, χ_{jk} – комплексные величины, определяемые формулой

$$\chi_{jk} = \sqrt{\frac{s}{A_i} + (K_L \mu_{jk})^2}, \quad (3.10)$$

a_{jk}, b_{jk} – произвольные коэффициенты, для определения которых необходимо

воспользоваться граничными условиями (3.5)-(3.6). Условиям (3.3), (3.4) функции Θ_{jk} удовлетворяют автоматически.

Отметим, что уравнение (3.9), при любых B_j , имеет счетную систему корней [5]. Таким образом, системы чисел $\{\mu_{jk}\}$ и соответствующих функций $\{J_0(\mu_{jk}R)\}$ являются собственными числами и собственными функциями задачи Штурма-Лиувилля, которые обладают свойством полноты в пространстве функций $L_2[0,1]$. Следовательно, любой элемент из этого пространства можно представить в виде ряда по этим функциям

$$\Theta_k(s, R, X) = \sum_{j=1}^{\infty} (a_{kj}e^{\chi_{kj}X} + b_{kj}e^{-\chi_{kj}X})J_0(\mu_{kj}R). \quad (3.11)$$

Из условий (3.7) находим коэффициенты a_{3j}, b_{1j} ,

$$a_{3j} = b_{1j} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N} - \text{множество натуральных чисел.} \quad (3.12)$$

При подстановке (3.11) в условия (3.5), (3.6) образуются невязки N_1, N_2, N_3, N_4 , которые можно представить в следующем виде:

$$N_1 = \Theta_1 - \Theta_2, \quad N_2 = \Lambda_1 \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} - \Lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial X} - \frac{1}{s} \quad \text{при } X = 0, \quad (3.13)$$

$$N_3 = \Theta_2 - \Theta_3, \quad N_4 = \Lambda_2 \frac{\partial \Theta_2}{\partial X} - \Lambda_3 \frac{\partial \Theta_3}{\partial X} \quad \text{при } X = 1. \quad (3.14)$$

Согласно методу Галеркина невязка N_i должна быть ортогональна координатным функциям, которые в данном случае имеют вид $\{J_0(\mu_{kj}R)\}$.

Используя этот факт, можно записать следующие выражения:

$$\int_0^1 R J_0(\mu_{1j}R) N_1(s, R) dR = 0, \quad \int_0^1 R J_0(\mu_{1j}R) N_2(s, R) dR = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad (3.15)$$

$$\int_0^1 R J_0(\mu_{2j}R) N_3(s, R) dR = 0, \quad \int_0^1 R J_0(\mu_{2j}R) N_4(s, R) dR = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \quad (3.16)$$

Введем в рассмотрение частичные суммы ряда (3.11) порядка m , которые с учетом (3.12) имеют следующий вид

$$\Theta_1^m(s, R, X) = \sum_{k=1}^m (a_{1k}e^{\chi_{1k}X})J_0(\mu_{1k}R), \quad (3.17)$$

$$\Theta_2^m(s, R, X) = \sum_{k=1}^m (a_{2k}e^{\chi_{2k}X} + b_{2k}e^{-\chi_{2k}X})J_0(\mu_{2k}R), \quad (3.18)$$

$$\Theta_3^m(s, R, X) = \sum_{k=1}^m (a_{3k} e^{\chi_{3k} X}) J_0(\mu_{3k} R). \quad (3.19)$$

Подставляя (3.17)-(3.19) в выражения (3.15), (3.16) и учитывая ортогональность координатных функций, получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов в равенствах (3.17)-(3.19):

$$a_{1j} \langle J_0^2(\mu_{1j}) \rangle - \sum_{k=1}^m (a_{2k} + b_{2k}) \langle J_0(\mu_{1j}), J_0(\mu_{2k}) \rangle = 0; \quad (3.20)$$

$$\Lambda_1 \chi_{1j} a_{1j} \langle J_0^2(\mu_{1j}) \rangle - \sum_{k=1}^m (a_{2k} - b_{2k}) \Lambda_2 \chi_{2k} \langle J_0(\mu_{1j}), J_0(\mu_{2k}) \rangle = \frac{\langle J_0^2(\mu_{1j}) \rangle}{s}; \quad (3.21)$$

$$(a_{2j} e^{\chi_{2j}} + b_{2j} e^{-\chi_{2j}}) \langle J_0^2(\mu_{2j}) \rangle - \sum_{k=1}^m (b_{3k} e^{-\chi_{3j}}) \langle J_0(\mu_{2j}), J_0(\mu_{3k}) \rangle = 0; \quad (3.22)$$

$$\Lambda_2 \chi_{2j} (a_{2j} e^{\chi_{2j}} - b_{2j} e^{-\chi_{2j}}) \langle J_0^2(\mu_{2j}) \rangle + \sum_{k=1}^m (\Lambda_3 \chi_{3j} b_{3k} e^{-\chi_{3j}}) \langle J_0(\mu_{2j}), J_0(\mu_{3k}) \rangle = 0; \quad (3.23)$$

В полученной системе использованы следующие обозначения

$$\langle J_0(\mu_{1j}) \rangle = \int_0^1 R J_0(\mu_{1j} R) dR; \quad \langle J_0^2(\mu_{1j}) \rangle = \int_0^1 R J_0^2(\mu_{1j} R) dR;$$

$$\langle J_0^2(\mu_{2j}) \rangle = \int_0^1 R J_0^2(\mu_{2j} R) dR; \quad \langle J_0(\mu_{1j}), J_0(\mu_{2k}) \rangle = \int_0^1 R J_0(\mu_{1j} R) J_0(\mu_{2k} R) dR;$$

$$\langle J_0(\mu_{2j}), J_0(\mu_{3k}) \rangle = \int_0^1 R J_0(\mu_{2j} R) J_0(\mu_{3k} R) dR;$$

Из уравнений (3.22),(3.23) выразим коэффициенты a_{2j}, b_{2j} через b_{3j} :

$$\Lambda_2 \chi_{2j} a_{2j} \langle J_0^2(\mu_{2j}) \rangle = 0.5 \sum_{k=1}^m b_{3k} (\Lambda_2 \chi_{2j} - \Lambda_3 \chi_{3j}) e^{-(\chi_{3j} + \chi_{2j})} \langle J_0(\mu_{2j}), J_0(\mu_{3k}) \rangle; \quad (3.24)$$

$$\Lambda_2 \chi_{2j} b_{2j} \langle J_0^2(\mu_{2j}) \rangle = 0.5 \sum_{k=1}^m b_{3k} (\Lambda_2 \chi_{2j} + \Lambda_3 \chi_{3j}) e^{-(\chi_{3j} - \chi_{2j})} \langle J_0(\mu_{2j}), J_0(\mu_{3k}) \rangle; \quad (3.25)$$

Исключая коэффициенты a_{1j} из уравнений (3.20), (3.21) и подставляя (3.24), (3.25) в полученное равенство, после несложных преобразований находим

$$\sum_{n=1}^m b_{3n} e^{-\chi_{3n}} A_{jn} = \frac{2\Lambda_2}{s} \langle J_0(\mu_{1j}) \rangle, \quad (3.26)$$

где $A_{jn} = \sum_{k=1}^m Z_{jkn} \frac{D_{jkn}}{\chi_{2k}}$; $D_{jkn} = \langle J_0(\mu_{1j}), J_0(\mu_{2k}) \rangle \langle J_0(\mu_{2j}), J_0(\mu_{3k}) \rangle / \langle J_0^2(\mu_{2j}) \rangle$;

$$Z_{jkn} = (\Lambda_2 \chi_{2k} - \Lambda_3 \chi_{3n}) (\Lambda_1 \chi_{1j} - \Lambda_2 \chi_{2k}) e^{-\chi_{2k}} + (\Lambda_2 \chi_{2k} + \Lambda_3 \chi_{3n}) (\Lambda_1 \chi_{1j} + \Lambda_2 \chi_{2k}) e^{\chi_{2k}}.$$

Если ввести следующие обозначения:

$$Y_n = \frac{sb_{3n}e^{-\chi_{3n}}}{2\Lambda_2}, \quad A = \|A_{jn}\| - \text{квадратная матрица, } j = \overline{1, m}, \quad n = \overline{1, m};$$

Y – вектор столбец с компонентами $\{Y_n\}_{n=1}^m$,

G – вектор столбец с компонентами $\{J_0(\mu_{1j})\}_{j=1}^m$,

то система (3.26) может быть записана в стандартной матричной форме

$$A \cdot Y = G \quad (3.27)$$

Интегралы, входящие в формулы для вычисления элементов матрицы A и вектора G легко вычисляются в явном виде с помощью свойств функций Бесселя и могут быть представлены следующими выражениями

$$\langle J_0(\mu_{kj}) \rangle = \frac{J_1(\mu_{kj})}{\mu_{kj}}, \quad \langle J_0^2(\mu_{kj}) \rangle = 0.5 (J_0^2(\mu_{kj}) + J_1^2(\mu_{kj})), \quad k = 1, 2, 3; \quad j = \overline{1, m},$$

$$\langle J_0(\mu_{kj}), J_0(\mu_{pn}) \rangle = \frac{(B_k - B_p)J_0(\mu_{pn})J_0(\mu_{kj})}{(\mu_{kj}^2 - \mu_{pn}^2)}, \quad k = 1, 2, 3; \quad p = 1, 2, 3; \quad j, n = \overline{1, m}.$$

Решив систему (3.27), можно найти коэффициенты a_{2j} и b_{2j} из равенств (3.24), (3.25), а затем - a_{1j} , используя выражение (3.20). Найденные таким образом коэффициенты совместно с равенствами (3.17)-(3.19) определяют решение задачи (2.11)-(2.17) в изображениях по Лапласу с точностью, определяемой порядком приближения m . В частности, формула для определения температуры в эталонном теле (тело с номером 3) принимает следующую форму

$$\Theta_3^m(s, X, R) = \frac{2\Lambda_2}{s} \sum_{n=1}^m Y_n(s) e^{-\chi_{3n}(X-1)} J_0(\mu_{3n}R). \quad (3.28)$$

В дальнейшем, в основном, будем использовать эту формулу, поскольку замеры температур для определения тепловых свойств исследуемого образца (область с номером 2) проводятся в эталонном теле с номером – 3.

Очевидно, что точно найти оригинал изображения (3.28) практически невозможно, но численно, как это будет показано, вполне реально. Кроме того, иметь изображения по Лапласу искомых функций полезно и с точки зрения анализа

температур при наступлении регулярного режима третьего рода (определение регулярного режима третьего рода можно найти в работах [2, 4]). Для этого найденные изображения температур нужно умножить на «s» и вместо параметра «s» подставить величину $i\Omega$, где i – мнимая единица, а Ω – безразмерная частота, определяемая работой нагревательного устройства на границе между телами 1 и 2. Затем требуемая температура в k -том теле находится так

$$\theta_k^m(Fo, X, R) = Re[i\Omega \cdot \Theta_k^m(i\Omega, X, R)e^{i\Omega Fo}], \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.29)$$

Для численного нахождения оригинала изображения (3.28) воспользуемся результатами работы [7], в которой приведена достаточно эффективная формула численного обращения интегрального преобразования Лапласа. Применяя эту формулу к решению задачи (2.11)-(2.17), полученного в изображениях, находим

$$\theta_k^m(Fo, X, R) = \frac{\beta}{N} \left\{ 0.5 \Theta_k^m(\beta, X, R) \exp(\beta t) + \sum_{n=1}^{N-1} Re[\exp(tQ(\omega_n)) \Theta_k^m(Q(\omega_n), X, R) (1 + i\sigma(\omega_n))] \right\}, \quad (3.30)$$

где $\omega_n = n\pi / N$, $\beta = 2N/5t$, i – мнимая единица

$$Q(\theta) = \beta \theta (ctg(\theta) + i), \quad \sigma(\theta) = \theta + (\theta ctg(\theta) - 1) ctg(\theta).$$

Для широкого класса функций приведенная формула обращения преобразования Лапласа дает относительную погрешность порядка $\sim 10^{-0.6N}$.

По формулам (3.30), при $k=3$, была проведена серия расчетов с целью проверки сходимости полученных приближенных решений при увеличении порядка приближения – m . Расчеты проводились при значении исходных параметров, приведенных в табл. 1, 2.

Таблица 1

Значения тепловых характеристик тел

Обозначения параметров	λ_1	a_1	λ_2	a_2	λ_3	a_3	α
Размерность величин	Вт/(м*К)	м ² /с	Вт/(м*К)	м ² /с	Вт/(м*К)	м ² /с	Вт/(м ² *К)
Значения величин	0.194	1.15*10 ⁻⁷	1.34	8.3*10 ⁻⁷	1.34	8.3*10 ⁻⁷	5

На рис. 2 показана зависимость модуля разности между двумя соседними приближениями от номера приближений для температуры эталонного тела 3 в точке $X=1$ в моменты $Fo=20$ и 2.

Таблица 2

Размеры тел и характеристики нагревателя

Обозначения параметров	L	r_0	P	S	ω_0	q_0	t_0
Размерность величин	м	м	м	м ²	рад/с	Вт/м	с
Значения величин	0,025	0,015	0,0942	0,00071	0,025	500	$2\pi/\omega_0$

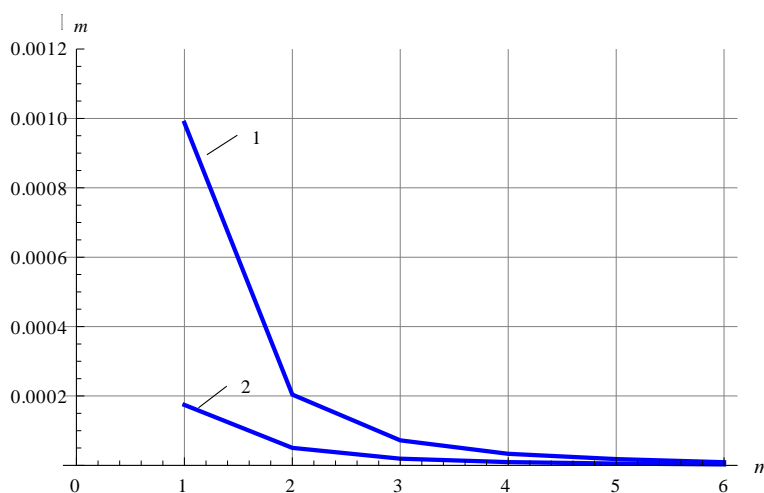


Рис. 2. Зависимость Δ_m от номера приближений m , $\Delta_m = \left| \theta_k^m(Fo, X, R) - \theta_k^{m-1}(Fo, X, R) \right|$;
 1 - $\kappa=3$, $Fo=20$, $X=1$, $R=0$; 2 - $\kappa=3$, $Fo=2$, $X=1$, $R=0$;

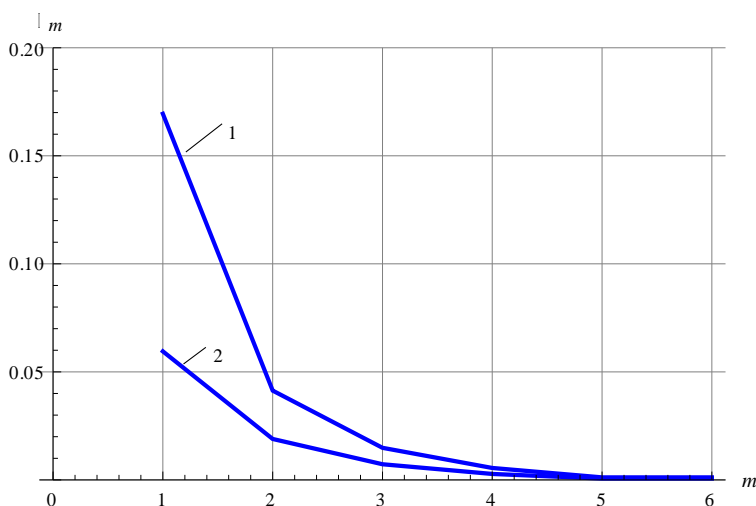


Рис.3. Зависимость $\delta_m\%$ от номера приближений m ;
 1 – $\kappa=3$, $Fo=20$, $X=1$, $R=0$; 2 – $\kappa=3$, $Fo=2$, $X=1$, $R=0$

На рис. 3 приведена зависимость относительной погрешности приближений $\delta_m = |(\theta_k^m(Fo, X, R) - \theta_k^7(Fo, X, R)) / \theta_k^7(Fo, X, R)| * 100\%$ от их номера (за точное решение принято приближение с номером 7). Рис. 2 показывает, что последовательность приближений, полученная по разработанному методу, довольно быстро сходится, а рис.3 иллюстрирует тот факт, что уже первое приближение при используемых исходных данных дает хорошую точность, которая не превышает 0.2%.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда тепловые свойства эталонных тел одинаковые, а тепловые свойства образца значительно меньше по величине, чем соответствующие эталонные свойства. Например, $\lambda_1 = \lambda_3 = 1.34$ Вт/(м * К), $a_1 = a_3 = 8.3 * 10^{-7}$ м²/с, а $\lambda_2 = 0.194$ Вт/(м * К), $a_2 = 1.15 * 10^{-7}$ м²/с. Результаты вычислений представлены на рис. 4, 5.

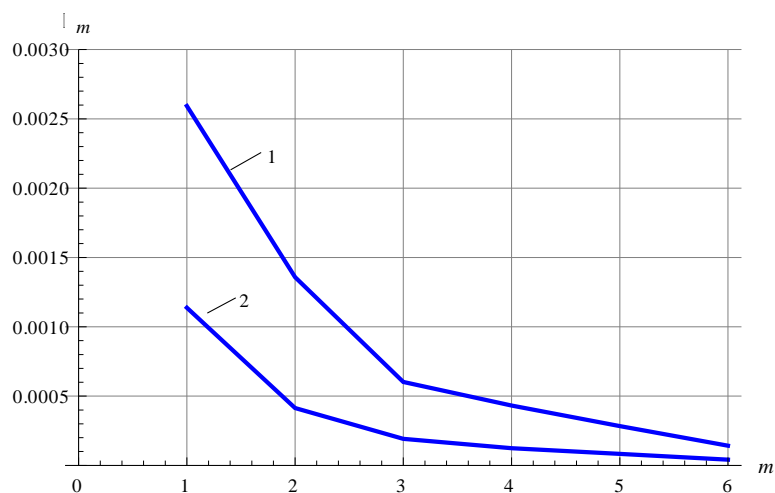


Рис. 4. Зависимость Δ_m от номера приближений m

$$\Delta_m = \left| \theta_k^m (Fo, X, R) - \theta_k^{m-1} (Fo, X, R) \right|; \text{ 1 - } \kappa=3, Fo=20, X=1, R=0; \text{ 2 - } \kappa=3, Fo=2, X=1, R=0; 2$$

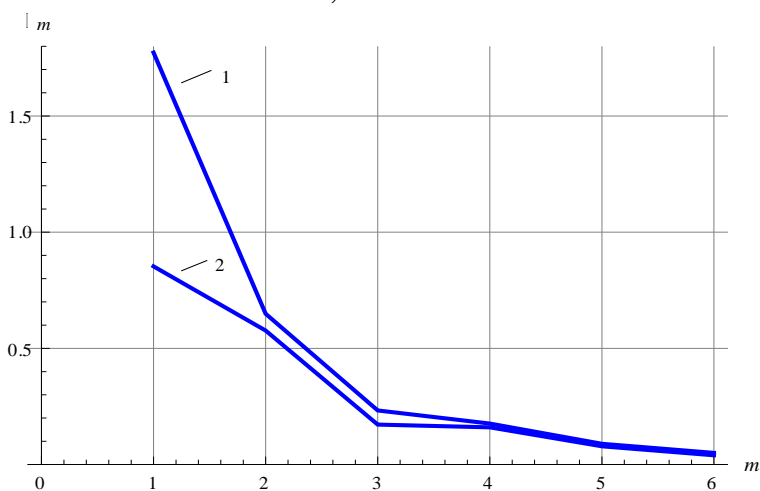


Рис.5. Зависимость $\delta_m\%$ от номера приближений m ,

$$1 - \kappa=3, Fo=20, X=1, R=0; \text{ 2 - } \kappa=3, Fo=2, X=1, R=0$$

Как и в первом случае, рис.4 показывает сходимость последовательности приближенных решений, а рис.5 иллюстрирует и сходимость алгоритма, и погрешность приближенных решений. Следует отметить, что в данном случае сходимость несколько медленнее, чем в первом варианте расчетов. Это объясняется

тем, что теплофизические свойства образца и эталонных тел существенно различаются. Поэтому для нивелирования невязки по условиям сопряжения необходим более высокий порядок приближений. Однако и в этом случае погрешность первого приближения не превосходит 2%.

Проведенный анализ позволяет предсказать ситуацию, когда процесс сходимости будет замедляться. Действительно, как было показано, сходимость разработанного алгоритма будет замедляться, если увеличится невязка по условиям сопряжения. Это может произойти при малых толщинах исследуемого образца, имеющего высокую теплопроводность (большую, чем у эталонных тел). Вычислительные алгоритмы полностью подтверждают этот вывод.

3.2. Случай одинаковых тепловых свойств во всех трех зонах

Рассмотрим теперь частный случай решаемой задачи. Предположим, что тепловые свойства всех трех тел одинаковые. Этот случай интересен тем, что на его примере можно показать, что матрица системы (51) невырожденная, по крайней мере, в случае, когда теплофизические свойства трех контактирующих тел мало отличаются друг от друга. Кроме того, для этого случая удастся получить решение в замкнутой аналитической форме. Итак, в рассматриваемом случае имеем $\Lambda_1 = \Lambda_2 = \Lambda_3 = A_1 = A_2 = A_3 = 1$; $B_1 = B_2 = B_3$; $\mu_{1j} = \mu_{2j} = \mu_{3j} = \mu_j$, $\forall j = 1, 2, \dots$

$$\chi_{1j} = \chi_{2j} = \chi_{3j} = \chi_j = \sqrt{s + (K_L \mu_j)^2} \quad (3.31)$$

Учитывая выписанные выше значения безразмерных параметров, ортогональность системы собственных функций $\{J_0(\mu_j R)\}$ и определение матрицы A в системе (3.27), находим:

$$D_{jkn} = \begin{cases} 0, & j \neq k, \quad k \neq n; \\ \langle J_0^2(\mu_j) \rangle, & j = k = n; \end{cases} \quad Z_{jjj} = 4\chi_j^2 e^{\chi_j}. \quad (3.32)$$

Из (3.32) следует, что матрица A ортогональна и элементы на главной

диагонали будут следующие

$$A_{jn} = \begin{cases} 0, & j \neq n; \\ 4\chi_j e^{\chi_j} \langle J_0^2(\mu_j) \rangle, & j = n; \end{cases} \text{ а } j - \text{ компонента вектора } G \text{ равна } G_j = \langle J_0(\mu_j) \rangle.$$

Следовательно, решение системы (3.27) будет иметь вид

$$Y_j = \frac{\langle J_0(\mu_j) \rangle}{4\chi_j e^{\chi_j} \langle J_0^2(\mu_j) \rangle}, \quad \forall j = 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

Подставляя формулу (3.33) в (3.28) и устремляя t к бесконечности, получаем изображение температурного поля в третьем эталонном теле в следующем виде

$$\Theta_3(s, X, R) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\langle J_0(\mu_j) \rangle e^{-\chi_j X}}{2\chi_j \langle J_0^2(\mu_j) \rangle} J_0(\mu_j R).$$

Учитывая, что

$$\langle J_0(\mu_j) \rangle = \frac{J_1(\mu_j)}{\mu_j}, \quad \langle J_0^2(\mu_j) \rangle = 0.5 \left(J_0^2(\mu_j) + J_1^2(\mu_j) \right), \quad \forall j = 1, 2, 3, \dots \dots, \quad \text{выражение}$$

для $\Theta_3(s, X, R)$ можно переписать и так

$$\Theta_3(s, X, R) = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_j) J_0(\mu_j R) e^{-\chi_j X}}{\mu_j \chi_j [J_0^2(\mu_j) + J_1^2(\mu_j)]}. \quad (3.34)$$

К формуле (3.34) применим обратное преобразование Лапласа [8]:

$$\theta_3(Fo, X, R) = L^{-1}[\Theta_3(s, X, R)] = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_j) J_0(\mu_j R)}{\mu_j [J_0^2(\mu_j) + J_1^2(\mu_j)]} \cdot L^{-1} \left[\frac{e^{-X\sqrt{s+(K_L\mu_j)^2}}}{s\sqrt{s+(K_L\mu_j)^2}} \right]. \quad (3.35)$$

Известно [8], что $L^{-1} \left[\frac{e^{-X\sqrt{s+(K_L\mu_j)^2}}}{s\sqrt{s+(K_L\mu_j)^2}} \right] = \int_0^{Fo} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp \left[-\frac{X^2}{4t} - (K_L\mu_j)^2 t \right] dt$. Вычисляя

этот интеграл и подставляя полученное выражение в (3.35), находим

$$\theta_3(Fo, X, R) = \frac{1}{2K_L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_j) J_0(\mu_j R)}{(\mu_j)^2 [J_0^2(\mu_j) + J_1^2(\mu_j)]} \Phi(Fo, X, \mu_j), \quad (3.36)$$

где

$$\Phi(Fo, X, \mu_j) = \left\{ e^{-K_L X \mu_j} \operatorname{erfc} \left[\frac{X}{2\sqrt{Fo}} - K_L \mu_j \sqrt{Fo} \right] - e^{K_L X \mu_j} \operatorname{erfc} \left[\frac{X}{2\sqrt{Fo}} + K_L \mu_j \sqrt{Fo} \right] \right\}.$$

Если учесть тот факт, что в данном случае $a_{2j} = 0$; $a_{1j} = b_{2j} = b_{3j} = 2Y_j e^{-X_j}/s$, а Y_j определяется формулой (3.33), то выражение (3.36) продолжается естественным образом в зону 2 и 1. Только в зоне 1 вместо X надо взять $-X$. Таким образом, в рассматриваемом частном случае решение задачи будет иметь следующий вид

$$\theta(Fo, X, R) = \frac{1}{2K_L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_j) J_0(\mu_j R)}{(\mu_j)^2 [J_0^2(\mu_j) + J_1^2(\mu_j)]} \Phi(Fo, |X|, \mu_j), \forall X, Fo > 0, 0 \leq R \leq 1, \quad (3.37)$$

Пользуясь формулой (3.34) и теоремой о предельных значениях изображения [8], нетрудно получить решение задачи, в данном частном случае, для стационарного режима теплообмена. Действительно, согласно теории операционного исчисления запишем

$$\theta_3(Fo, X, R) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot \Theta_3(s, X, R)) = \frac{1}{K_L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_j) J_0(\mu_j R) e^{-K_L X \mu_j}}{\mu_j^2 [J_0^2(\mu_j) + J_1^2(\mu_j)]}, \text{ или, по аналогии}$$

получения формулы (3.37), можно записать

$$\theta(X, R) = \frac{1}{K_L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_j) J_0(\mu_j R) e^{-K_L |X| \mu_j}}{\mu_j^2 [J_0^2(\mu_j) + J_1^2(\mu_j)]}, -\infty < X < \infty, 0 \leq R \leq 1. \quad (3.38)$$

Кроме того, используя асимптотические свойства функции $\operatorname{erfc}[x]$ при больших значениях аргумента, формула (3.37) может быть переписана в следующем виде

$$\theta(Fo, X, R) = \frac{1}{K_L} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_j) J_0(\mu_j R)}{\mu_j^2 [J_0^2(\mu_j) + J_1^2(\mu_j)]} \left(e^{-K_L |X| \mu_j} - \frac{e^{-(K_L \mu_j)^2 Fo}}{\sqrt{\pi (K_L \mu_j)^2 Fo}} \right), \forall X, 0 \leq R \leq 1, Fo \rightarrow \infty \quad (3.39)$$

По формулам (3.37), (3.38) и по общему алгоритму (параграф 3.1) были проведены расчеты, подтверждающие сходимость общего алгоритма, так абсолютная погрешность первого приближения, полученного по общему алгоритму, не превосходит $4 \cdot 10^{-6}$, а приближения 5-го порядка – $1.5 \cdot 10^{-6}$ (относительные погрешности 0.001% и 0.0005% соответственно).

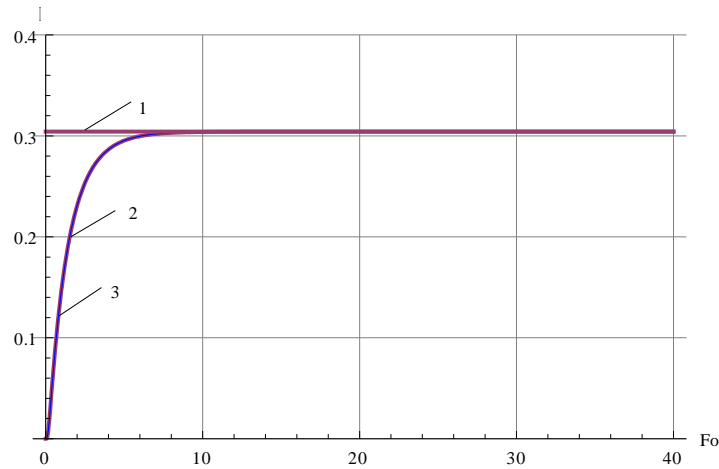


Рис. 6. Зависимость безразмерной температуры от числа Фурье при $R=0$ и $X=1$:

1 – стационарный режим; 2 – общий алгоритм, первое приближение; 3 – по (3.37)

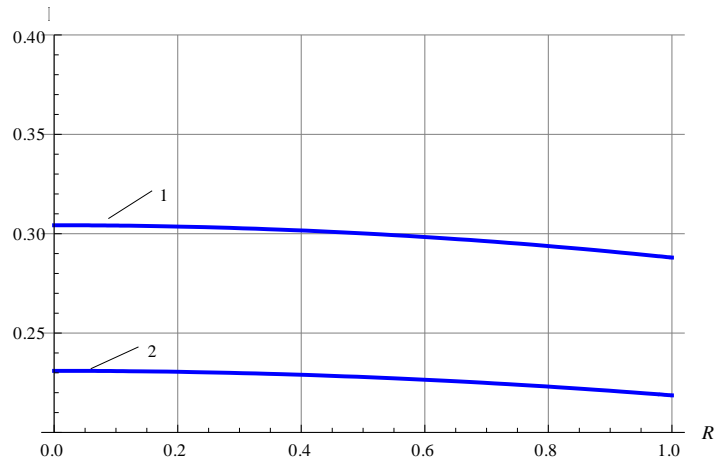


Рис. 7. Распределение температуры по сечению эталонного тела при $X=1$:

1 – $Fo=20$; 2 – $Fo=2$

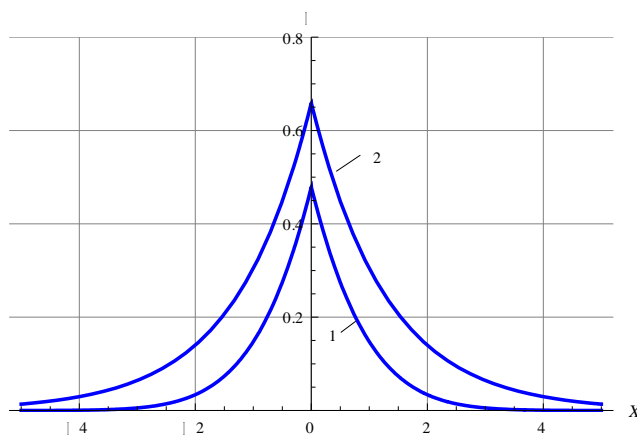


Рис. 8. Распределение температуры по длине всего тела при $R=1$:
1 – $Fo=1$; 2 – $Fo=20$

Рис. 6 еще раз показывает работоспособность разработанного алгоритма решения общего случая задачи (2.11)-(2.17), так как уже первое приближение на графике совпадает с точным решением, а повышение порядка приближения еще больше уменьшает погрешность. На рис. 7 представлено распределение безразмерной температуры по сечению $X=1$ на различные моменты времени $Fo=1$ и $Fo=20$. Из рисунка видно, что при заданном коэффициенте теплопередачи ($\alpha = 5 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$) уже проявляется неоднородность – температура в центре сечения отличается от температуры поверхности. Рис.8 иллюстрирует распределение температуры по осевой линии всего составного тела. Видно, что, примерно, через 5 – 6 длин рассматриваемого образца температура близка к своему начальному значению. Таким образом, длина эталонных тел должна быть больше этой величины.

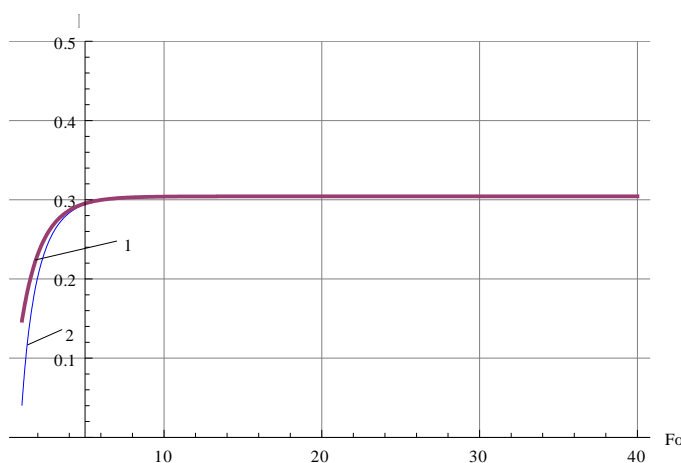


Рис. 9. Результаты вычислений по формулам (3.37) и (3.39):
1 - (3.37); 2 - (3.39).

На рис. 9 показано сравнение результатов вычислений, выполненных по соотношениям (3.37) и (3.39). Видно, что при $t \rightarrow \infty$ обе формулы дают одинаковые результаты, но формула (3.39) по своей структуре значительно проще выражения (3.37) и более удобна для анализа и практических расчетов.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда тепловой поток на стыке эталонного тела 1 и исследуемого образца является периодической функцией. Так как любую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье, в частности по косинусам, и для линейных задач действует принцип суперпозиции, то можно полагать, что вышеупомянутый поток в безразмерной форме задается функцией $\cos(\Omega Fo)$. Здесь Ω – безразмерная частота колебаний теплового потока, а тогда период колебаний будет $2\pi/\Omega$. В этом случае, как уже отмечалось в параграфе 3.1, наступает регулярный режим третьего рода (по классификации Кондратьева [4]) и температура в эталонном теле 3 определяется формулой (3.29). Таким образом, для рассматриваемого случая, учитывая (3.31) и (3.34) из (3.29), находим

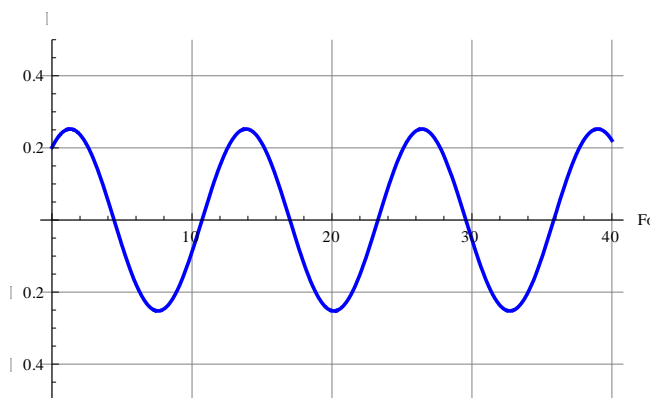
$$\theta_3(Fo, X, R) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_j)J_0(\mu_j R)}{\mu_j [J_0^2(\mu_j) + J_1^2(\mu_j)]} \cdot \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-X\sqrt{i\Omega + (K_L\mu_j)^2}}}{\sqrt{i\Omega + (K_L\mu_j)^2}} e^{i\Omega Fo} \right]. \quad (3.40)$$

Выделяя действительную часть в выражении (3.40), получаем

$$\theta_3(Fo, X, R) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{J_1(\mu_j)J_0(\mu_j R)}{\mu_j[J_0^2(\mu_j)+J_1^2(\mu_j)]} \cdot \frac{e^{-X \cdot \gamma_{+j}}}{\sqrt[4]{\Omega^2+(K_L \mu_j)^4}} \cos(\Omega \cdot Fo - X \cdot \gamma_{-j} - \Psi_j) \quad (3.41)$$

где

$$\gamma_{+j} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\Omega^2 + (K_L \mu_j)^4} + (K_L \mu_j)^2 \right)}; \quad \gamma_{-j} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\Omega^2 + (K_L \mu_j)^4} - (K_L \mu_j)^2 \right)}; \quad \Psi_j = \arctg \frac{\gamma_{-j}}{\gamma_{+j}}$$



**Рис.10. Изменение безразмерной температуры
в точке $X=1$ и $R=0$ со временем**

На рис.10 изображен график изменения температуры в точке возможного расположения температурного датчика, когда интенсивность источника тепла, расположенного на границе раздела эталонного тела 1 и исследуемого образца 2, изменяется по закону $Q(Fo)=\cos(\Omega Fo)$.

На рис. 11 и 12 показаны графики зависимости амплитуды колебаний температуры и сдвига фаз от параметра μ , который связан с коэффициентом теплоотдачи с боковых стенок рассматриваемой системы тел. Следует подчеркнуть, что, как и ранее (случай $Q(Fo)=1$), температурное поле хорошо описывается первым слагаемым, входящим в сумму (3.40). Этот факт и характер зависимости амплитуды A и сдвига фаз от параметра μ показывают, что полученные зависимости могут

быть использованы для нахождения коэффициента теплоотдачи с боковой поверхности данной системы.

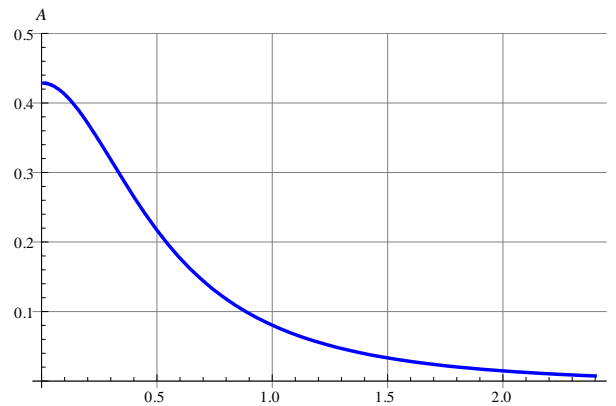


Рис. 11. Зависимость амплитуды колебаний температуры от параметра μ

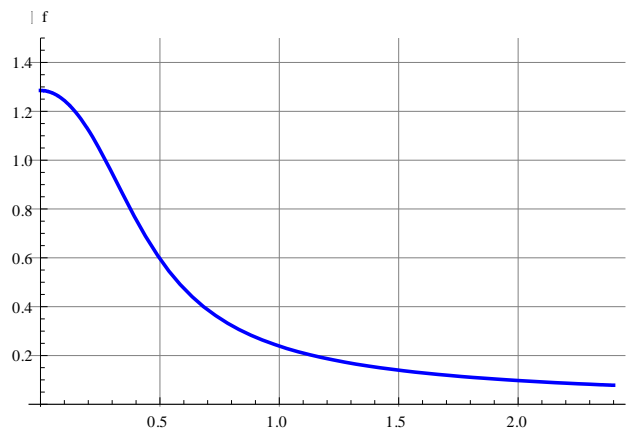


Рис. 12. Зависимость сдвига фаз от параметра μ

Следует также отметить, что если при измерении температуры в какой-либо точке эталонного тела удастся выделить неперiodическую (постоянную) составляющую, или если интенсивность источника тепла поддерживается постоянной, то для нахождения коэффициента теплоотдачи с боковой поверхности системы можно воспользоваться формулой (3.39), удерживая в ней первое слагаемое. Различные методы определения коэффициента теплоотдачи будут

рассмотрены далее.

3.3. Реализация математической модели для определения средней по сечению температуры

Рассмотрим задачу (2.19)-(2.23). Из уравнения (2.19) видно, что для замыкания системы (19)-(23) необходимо установить связь между температурой боковой поверхности системы тел со средней температурой по поперечному сечению данной системы. На примере частного случая, разобранный в параграфе 3.2, покажем, что одно из возможных замыканий системы (2.19)-(2.23), которое реализуется формулой (2.24), может не всегда выполняться.

Пользуясь определением средней по сечению температурой (2.18), из формулы (3.37) находим

$$\langle \theta(Fo, X) \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(J_1(\mu_j))^2}{K_L(\mu_j)^3 [J_0^2(\mu_j) + J_1^2(\mu_j)]} \Phi(Fo, |X|, \mu_j) \quad (3.42)$$

Введем в рассмотрение коэффициент, характеризующий отклонения температуры в рассматриваемой системе тел от средней по сечению

$$K_{\theta} = \frac{\theta(Fo, X, R)}{\langle \theta(Fo, X) \rangle}. \quad (3.43)$$

В общем случае эта величина зависит от переменных Fo, X, R . Однако, учитывая тот факт, что температурное поле определяется, с достаточной точностью, первым слагаемым формулы (3.37), из выражения (3.43) находим

$$K_{\theta} = \frac{\theta(Fo, X, R)}{\langle \theta(Fo, X) \rangle} = \frac{\mu_1 J_0(\mu_1 R)}{2J_1(\mu_1)} \quad (3.44)$$

Полученное соотношение для коэффициента K_{θ} показывает, что его величина, в основном, зависит от положения точки в сечении тела, в которой измеряется температура, и от параметра μ_1 , который, в свою очередь, полностью определяется безразмерным коэффициентом теплоотдачи с боковой поверхности рассматриваемой системы тел - B_k .

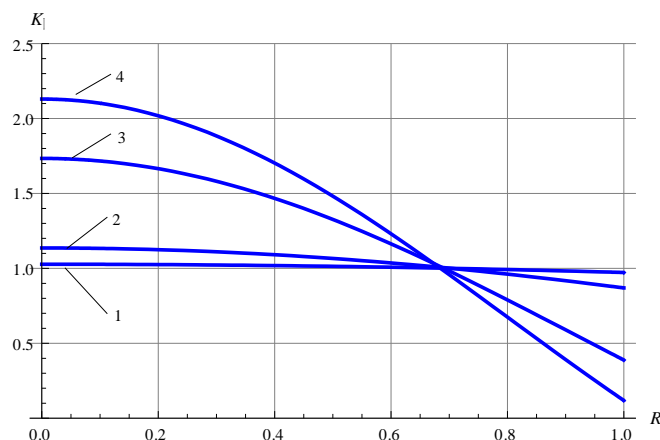


Рис. 13. Отклонение температуры в различных точках сечения от средней температуры по сечению:

$$1 - \mu_1 = 0.465; \quad 2 - \mu_1 = 1; \quad 3 - \mu_1 = 2; \quad 4 - \mu_1 = 2.3$$

Рис. 13 показывает, что возможны ситуации, когда температура в каком-либо сечении существенно отклоняется от средней по сечению температуры. Максимальные отклонения наблюдаются на осевой линии системы тел и на боковой поверхности рассматриваемых тел. Эти отклонения тем больше, чем больше коэффициент теплоотдачи. Так, например, при $B_k = 5.2$ ($\mu_1 = 2$) температура боковой поверхности более чем в два раза отличается от средней температуры, и формула (2.24) не может быть использована для замыкания системы (2.19)-(2.23). Однако, для указанной цели вполне допустимо допущение о пропорциональности температуры в выбранной точке (R, X) средней по сечению X температуре, то есть

$$\theta(F_0, X, R) = \frac{\mu_1 J_0(\mu_1 R)}{2J_1(\mu_1)} \langle \theta(F_0, X) \rangle, \quad (3.45)$$

тогда для температуры поверхности получаем

$$\theta(F_0, X, R)_{R=1} = \frac{\mu_1 J_0(\mu_1)}{2J_1(\mu_1)} \langle \theta(F_0, X) \rangle. \quad (3.46)$$

Коэффициент пропорциональности в формуле (3.46) зависит только от коэффициента теплоотдачи B_k . Аналог формулы (3.46) будет справедлив и в общем случае. Действительно, из формул (3.17)-(3.19) находим, что

$$\theta_k(Fo, X, R) = \frac{\mu_{k1} J_0(\mu_{k1} R)}{2J_1(\mu_{k1})} \langle \theta_k(Fo, X) \rangle, \quad k = 1, 2, 3 \quad (3.47)$$

Используя выражение (3.47) для замыкания системы (2.19)-(2.23) и вводя поправочный коэффициент к параметру ν - $K_{\nu k}$, $k = 1, 2, 3$, выпишем уравнение (2.19) в следующей форме

$$\frac{\partial \langle \theta_k \rangle}{\partial Fo} = A_k \left[\frac{\partial^2 \langle \theta_k \rangle}{\partial X^2} - \frac{\nu_k}{\Lambda_k} \langle \theta_k \rangle \right], \quad k = 1, 2, 3; \quad Fo > 0; \quad (2.19')$$

где $\nu_k = \nu K_{\nu k}$, $K_{\nu k} = \frac{\mu_{k1} J_0(\mu_{k1})}{2J_1(\mu_{k1})}$.

Теперь система (2.19')-(2.23) является замкнутой и может быть решена.

Из рис.13 также видно, что все кривые пересекаются примерно в одной точке $R \approx 0.68$, $K_\theta = 1$. Это говорит о том, что в некотором выбранном сечении X при $R \approx 0.68$ температура совпадает со средней по сечению при любом коэффициенте теплоотдачи. Таким образом, если установить датчик фиксирования температуры в точку $R \approx 0.68$ выбранного сечения, то замеренная температура будет совпадать со средней температурой по сечению. Следовательно, зная решение задачи (2.19')-(2.23) и экспериментальные данные, можно их использовать для отыскания тепловых свойств материалов.

Для иллюстрации сказанного приведем пример, в котором тепловые свойства эталонных тел одинаковые, а тепловые свойства образца значительно больше по величине: $\lambda_1 = \lambda_3 = 0.194$ Вт/(м·К), $a_1 = a_3 = 1.15 \cdot 10^{-7} \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, $\lambda_2 = 1.34$ Вт/(м·К), $a_2 = 8.3 \cdot 10^{-7} \text{м}^2/\text{с}$, $L=0.01$ м.

На рис.14 представлены результаты расчетов по общему алгоритму, разработанному в параграфе 3.1, температуры в эталонном теле 3 при $Q=1$, $X=1$ и $R=0$, а также средней по сечению $X=1$ температуры. Из этого рисунка видно, что температура в указанной точке не совпадает со средней температурой по выбранному сечению. Однако, температурная кривая, соответствующая точке $X=1$, $R=0.68$ полностью совпадает со средней по сечению температурой (см. рис.15).

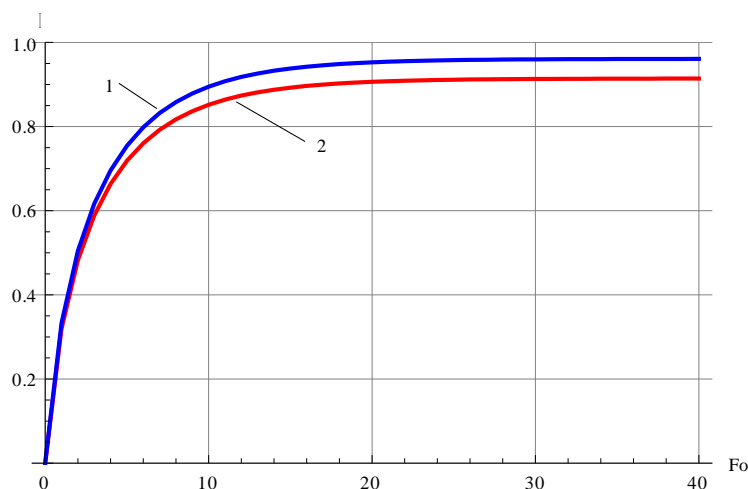


Рис. 14. Зависимость температуры от времени в эталонном теле 3.

1 – кривая, соответствующая температуре в точке $(X=1, R=0)$; 2 – кривая, соответствующая средней по сечению $X=1$ температуре

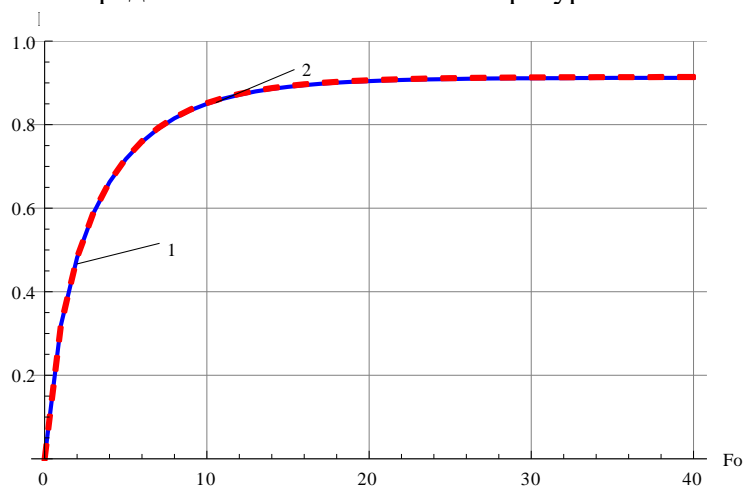


Рис.15. Сравнение температуры в точке $(X=1, R=0.68)$ со средней по сечению $X=1$ температурой.

1 - температура в точке $(X=1, R=0.68)$; 2 – средняя температура

Таким образом, если правильно выбрать точку, в которой следует проводить замеры температуры, то для обработки экспериментальных данных можно использовать среднюю температуру по сечению рассматриваемой системы тел.

Так как задача (2.19')-(2.23), описывающая поведение средней по сечению температуры, значительно проще исходной системы уравнений, то и ее решение может оказаться более простым, чем то, которое получено в параграфе 3.1. В итоге

оно может оказаться более пригодным для обработки экспериментальных данных.

Применяя к задаче (2.19')-(2.23) интегральное преобразование Лапласа, получаем следующую систему уравнений для нахождения изображений искомым функций

$$\overline{\langle \theta_k \rangle}_s = A_k \left[\frac{\partial^2 \overline{\langle \theta_k \rangle}}{\partial X^2} - \frac{\nu_k}{\Lambda_k} \overline{\langle \theta_k \rangle}_{R=1} \right], \quad k = 1, 2, 3; \quad (3.48)$$

$$X = 0, \quad \overline{\langle \theta_1 \rangle} = \overline{\langle \theta_2 \rangle}, \quad \Lambda_1 \frac{\partial \overline{\langle \theta_1 \rangle}}{\partial X} = \Lambda_2 \frac{\partial \overline{\langle \theta_2 \rangle}}{\partial X} + \overline{Q(s)}, \quad (3.49)$$

$$X = 1, \quad \overline{\langle \theta_2 \rangle} = \overline{\langle \theta_3 \rangle}, \quad \Lambda_2 \frac{\partial \overline{\langle \theta_2 \rangle}}{\partial X} = \Lambda_3 \frac{\partial \overline{\langle \theta_3 \rangle}}{\partial X}, \quad (3.50)$$

$$X \rightarrow \pm\infty, \quad \overline{\langle \theta_1 \rangle} \rightarrow 0, \quad \overline{\langle \theta_3 \rangle} \rightarrow 0. \quad (3.51)$$

Здесь s комплексный параметр преобразования Лапласа и $\overline{\langle \theta_k \rangle} = \int_0^\infty \langle \theta_k \rangle e^{-st} dt$.

Полученная система легко решается. В результате для изображений искомым функций получаем следующие формулы

$$\overline{\langle \theta_1 \rangle} = \overline{Q(s)} \frac{p_3^+ e^{\kappa_2 + \kappa_1 X} - p_3^- e^{-\kappa_2 + \kappa_1 X}}{p_1^+ p_3^+ e^{\kappa_2} - p_1^- p_3^- e^{-\kappa_2}}, \quad -\infty < X \leq 0; \quad (3.52)$$

$$\overline{\langle \theta_2 \rangle} = \overline{Q(s)} \frac{p_3^+ e^{-\kappa_2(X-1)} - p_3^- e^{\kappa_2(X-1)}}{p_1^+ p_3^+ e^{\kappa_2} - p_1^- p_3^- e^{-\kappa_2}}, \quad 0 \leq X \leq 1; \quad (3.53)$$

$$\overline{\langle \theta_3 \rangle} = \overline{Q(s)} \frac{2\Lambda_2 \kappa_2 e^{-\kappa_3(X-1)}}{p_1^+ p_3^+ e^{\kappa_2} - p_1^- p_3^- e^{-\kappa_2}}, \quad 1 \leq X < \infty; \quad (3.54)$$

где $\overline{Q(s)} = \int_0^\infty Q(t) e^{-st} dt$, $\kappa_k = \sqrt{\frac{\nu_k}{\Lambda_k} + \frac{s}{A_k}}$, $p_1^\pm = \Lambda_1 \kappa_1 \pm \Lambda_2 \kappa_2$, $p_3^\pm = \Lambda_3 \kappa_3 \pm \Lambda_2 \kappa_2$.

Для проведения вычислительных экспериментов воспользуемся формулами численного обращения преобразования Лапласа (3.30). Рассмотрим ситуацию, когда $Q(Fo)=1$ ($\overline{Q(s)} = 1/s$), а остальные исходные данные совпадают с данными примера, упомянутого выше.

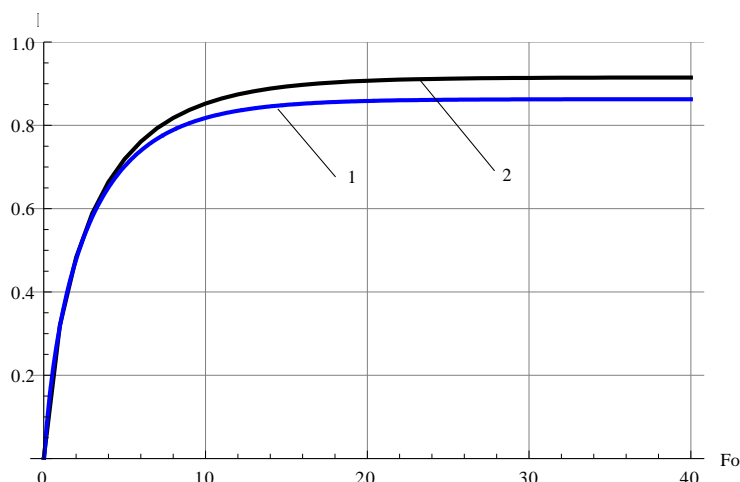


Рис.16. Сравнение средних температур по сечению $X=1$, вычисленных по общему алгоритму параграфа 3.1 и по формуле (3.54), когда замыкание системы (2.19)-(2.23) производится по формуле (2.24), 1-по формуле (3.54), когда $K_{v_k} = 1$ для всех k ; 2 – средняя температура, рассчитанная по общему алгоритму

Рис.16 показывает, что предположение о равенстве температуры поверхности рассматриваемой системы тел средней температуре приводит к результату, который может существенно отличаться от точных значений средней температуры. Если коэффициент K_{v_k} вычисляется по предлагаемой в настоящем параграфе формуле: $K_{v_k} = \frac{\mu_{k1} J_0(\mu_{k1})}{2J_1(\mu_{k1})}$, то результаты вычислений по формуле (3.54) и по общему алгоритму практически совпадают.

Рис.17 полностью подтверждает этот вывод. Приведенные результаты еще раз подтверждают тот факт, что если мерить температуру в точке, где она совпадает со средней по сечению температурой, то для обработки экспериментальных данных можно использовать решение задачи (3.48)-(3.51).

Например, если температурный датчик размещается в сечении $X=1$, то целесообразно рассмотреть формулу (3.54) при $X=1$. В этом случае и при $Q=1$ получаем

$$\langle \theta_3 \rangle = \frac{1}{s} \frac{2\Lambda_2 \kappa_2}{(p_1^+ p_3^+ e^{\kappa_2} - p_1^- p_3^- e^{-\kappa_2})}. \quad (3.55)$$

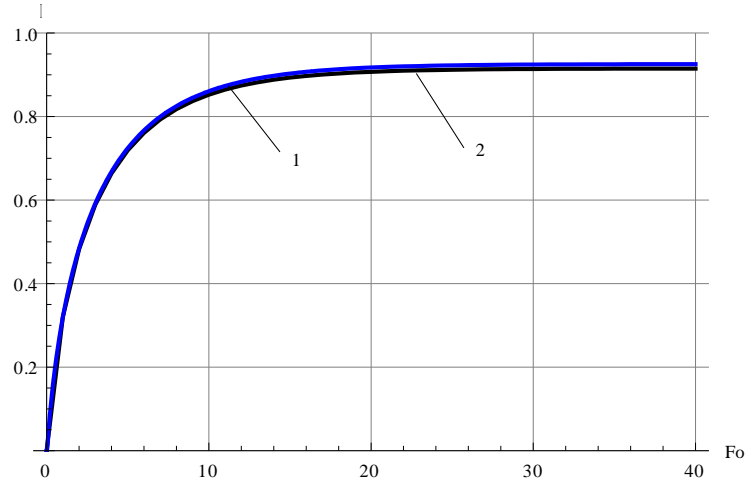


Рис.17. Сравнение средних температур по сечению $X=1$, вычисленных по общему алгоритму параграфа 3.1 и по формуле (3.54), когда замыкание системы (2.19)-(2.23) производится с учетом, что $K_{v_k} \neq 1$. 1-по формуле (3.54), когда $K_{v_k} \neq 1$; 2 – средняя температура, рассчитанная по общему алгоритму

Выражение (3.55) используем для получения асимптотической формулы, справедливой при больших значениях безразмерного времени Fo . Для этого используем известное в операционном исчислении положение о том, что если в пространстве оригиналов $Fo \rightarrow \infty$, то в пространстве изображений $s \rightarrow 0$. Записывая числитель и знаменатель формулы (3.55) с помощью формулы Тейлора, получаем

$$\langle \theta_3 \rangle = \frac{2\Lambda_2}{s} \frac{(\sqrt{\frac{v_2}{\Lambda_2}} + \frac{s}{2A_2} \sqrt{\frac{\Lambda_2}{v_2}} + O(s^2))}{(Z_0 + Z_1 s + O(s^2))}, \quad s \rightarrow 0, \quad (3.56)$$

$$\text{где } Z_0 = d_1^+ d_3^+ e^{\sqrt{\frac{v_2}{\Lambda_2}}} - d_1^- d_3^- e^{-\sqrt{\frac{v_2}{\Lambda_2}}};$$

$$Z_1 = (d_1^+ b_3^+ + d_3^+ b_1^+ + d_1^+ d_3^+ c_2) e^{\sqrt{\frac{v_2}{\Lambda_2}}} - (d_1^- b_3^- + d_3^- b_1^- - d_1^- d_3^- c_2) e^{-\sqrt{\frac{v_2}{\Lambda_2}}};$$

$$d_1^\pm = \sqrt{\Lambda_1 v_1} \pm \sqrt{\Lambda_2 v_2}; \quad d_3^\pm = \sqrt{\Lambda_3 v_3} \pm \sqrt{\Lambda_2 v_2}; \quad c_2 = \frac{1}{2A_2} \sqrt{\frac{\Lambda_2}{v_2}};$$

$$b_1^\pm = \frac{\Lambda_1}{2A_1} \sqrt{\frac{\Lambda_1}{v_1}} \pm \frac{\Lambda_2}{2A_2} \sqrt{\frac{\Lambda_2}{v_2}}; \quad b_3^\pm = \frac{\Lambda_3}{2A_3} \sqrt{\frac{\Lambda_3}{v_3}} \pm \frac{\Lambda_2}{2A_2} \sqrt{\frac{\Lambda_2}{v_2}};$$

Переходя в формуле (3.56) к оригиналу, находим

$$\langle \theta_3(Fo, 1) \rangle = \frac{2\sqrt{\Lambda_2 v_2}}{z_0} \left(1 - \left(1 - \frac{z_0 \Lambda_2}{2z_1 A_2 v_2} \right) e^{-\frac{z_0}{z_1} Fo} \right), \quad Fo \rightarrow \infty. \quad (3.57)$$

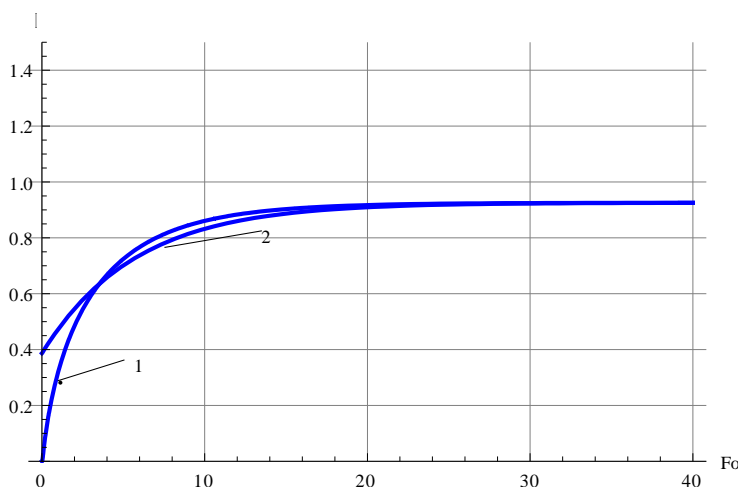


Рис. 18. Сравнение результатов вычислений по асимптотической формуле (3.57) (кривая 1) и по формулам (3.55), (3.30) (кривая 2)

Из рис. 18 видно, что при $Fo > 5$ формула (3.57) дает вполне удовлетворительные результаты.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда $Q(Fo) = \cos \Omega Fo$ и в системе реализуется регулярный режим третьего рода [4]. Как уже отмечалось в параграфе 3.2, в этом случае для того, чтобы получить необходимое решение, нужно воспользоваться формулой аналогичной формуле (3.29). Таким образом, можно записать

$$\langle \theta_k \rangle = Re [i \Omega \overline{\langle \theta_k(i\Omega, X) \rangle} e^{i\Omega Fo}], \quad k = 1, 2, 3, \quad i = \sqrt{-1}; \quad (3.58)$$

Здесь в формулах, определяющих $\overline{\langle \theta_k \rangle}$, функция $\overline{Q(s)} = 1/s$, а Re означает

действительную часть выражения, стоящего в квадратных скобках. Если для измерения температуры выбрано сечение $X=1$, то в формуле (3.58) надо положить $k=3$ и $X=1$.

Выражение (3.58) можно представить в форме более удобной для проведения расчетов:

$$\langle \theta_k \rangle (Fo, X) = Am_k(X) \cos(\Omega Fo + \Delta f_k(X)), \quad k = 1, 2, 3, \quad (3.59)$$

где $Am_k(X)$ амплитуда температурных колебаний, а $\Delta f_k(X)$ – сдвиг фаз. При этом

$$Am_k(X) = \sqrt{Re[i\Omega \langle \theta_k(i\Omega, X) \rangle]^2 + Im[i\Omega \langle \theta_k(i\Omega, X) \rangle]^2}; \quad \Delta f_k(X) = \arctg \left(\frac{Im[i\Omega \langle \theta_k(i\Omega, X) \rangle]}{Re[i\Omega \langle \theta_k(i\Omega, X) \rangle]} \right), \quad i = \sqrt{-1}. \quad (3.60)$$

С целью использования формул (3.59) для обработки экспериментальных данных целесообразно получить более простые соотношения, не содержащие символы взятия действительной и мнимой частей комплексного выражения $i\Omega \langle \theta_k(i\Omega, X) \rangle$. В работе [2] показано, что при условии

$$\sqrt{\sqrt{\left(\frac{\Omega}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{v_2}{\Lambda_2}\right)^2} + \frac{v_2}{\Lambda_2}} \gg 1 \quad (3.61)$$

выражение (3.59) при $k=3$ преобразуется к виду

$$\langle \theta_3 \rangle (Fo, X) = Am_3(X) \cos(\Omega Fo + \Delta f_3(X)), \quad (3.62)$$

где

$$Am_3(X) = 2\Lambda_2 \sqrt{\frac{2((g_2^+)^2 + (g_2^-)^2)}{((d_3^+)^2 + (d_3^-)^2)((d_1^+)^2 + (d_1^-)^2)}} \exp\left(- (X-1) \frac{g_3^+}{\sqrt{2}} - \frac{g_2^+}{\sqrt{2}}\right); \quad (3.63)$$

$$\Delta f_3(X) = - (X-1) \frac{g_3^-}{\sqrt{2}} - \frac{g_2^-}{\sqrt{2}} - \psi_1 + \psi_2 - \psi_3; \quad (3.64)$$

$$\psi_1 = \arctg\left(\frac{d_1^-}{d_1^+}\right); \quad \psi_2 = \arctg\left(\frac{g_2^-}{g_2^+}\right); \quad \psi_3 = \arctg\left(\frac{d_3^-}{d_3^+}\right); \quad (3.65)$$

$$g_k^{\pm} = \sqrt{\sqrt{\left(\frac{\Omega}{A_k}\right)^2 + \left(\frac{v_k}{\Lambda_k}\right)^2} \pm \frac{v_k}{\Lambda_k}}, \quad k = 1, 2, 3; \quad d_k^{\pm} = (\Lambda_k g_k^{\pm} + \Lambda_2 g_2^{\pm}), \quad k = 1, 3. \quad (3.66)$$

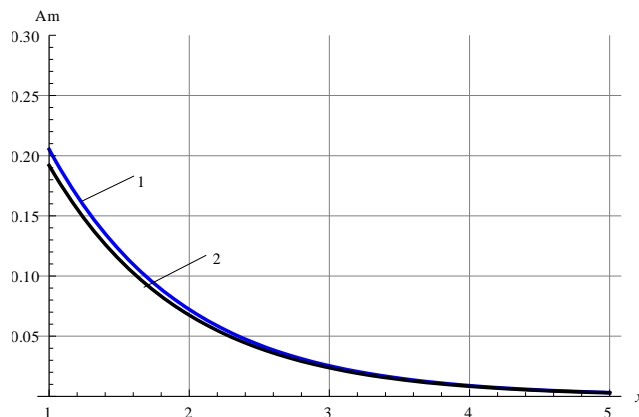


Рис. 19. Зависимость амплитуды колебаний от координаты X.
1 – по (3.60), 2 – по (3.63)

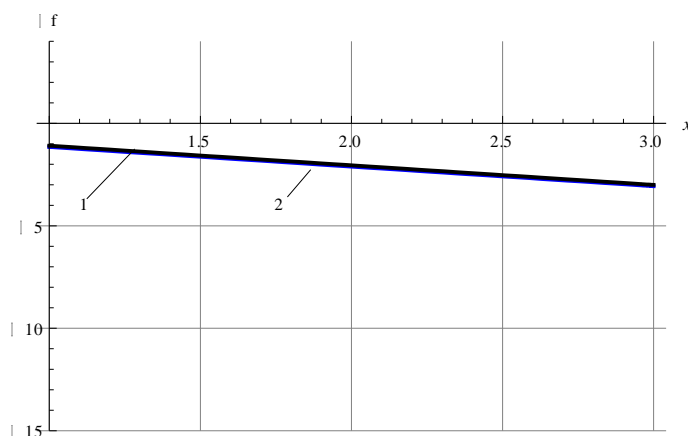


Рис. 20. Зависимость сдвига фаз от координаты X.
1 – по (3.60), 2 – по (3.64)-(3.66)

На рис. 19 и 20 приведены результаты вычислений амплитуды температурных колебаний и сдвига фаз в эталонном теле 3 по точным формулам (3.60) и по приближенным соотношениям (3.63)-(3.66). При этом значения безразмерных параметров, входящих в условие (3.61), принимались следующими: $\Omega = 2, A_2 = 7.21, \Lambda_2 = 6.93, v_2 = 0.2$. Данная ситуация соответствует случаю, в котором

коэффициенты теплопроводности и температуропроводности образца значительно меньше соответствующих параметров эталонных тел. С точки зрения выполнения условия (3.61), это худший вариант, так как при таких данных левая часть упомянутого неравенства равна 0,55. Однако и в этом случае погрешность приближенных формул не превосходит 5%. С увеличением частоты Ω погрешность быстро убывает.

Основные выводы

1. Разработаны различные алгоритмы решения задачи о температурном поле контактирующих трех тел в полной постановке и для определения средней по сечению температуры. В дальнейшем полученные результаты будут использованы для определения тепловых свойств опытного образца – тела с номером 2.
2. При правильно выбранной точке, в которой следует проводить замеры температуры, обработка экспериментальных данных может проводиться на основе использования формул, определяющих среднюю температуру по сечению рассматриваемой системы тел.
3. Установлено, в какую точку сечения необходимо поместить температурный датчик.
4. Предположение о равенстве температуры поверхности рассматриваемой системы тел средней температуре приводит к результату, который может существенно отличаться от точных значений средней температуры. Если коэффициент K_{vk} вычисляется по предлагаемой в настоящей работе формуле: $K_{vk} = \frac{\mu_{k1} J_0(\mu_{k1})}{2J_1(\mu_{k1})}$, то результаты вычислений по формуле (3.54) и по общему алгоритму практически совпадают.
5. Реализация предложенной модели в виде экспериментальной установки позволит существенно повысить точность определения коэффициентов

теплопроводности и температуропроводности, а также теплоемкость различных материалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Николаев С. А., Николаева Н.Г., Саламатин А.Н. Теплофизика горных пород. Казань: КГУ, 1987. 150 с.
2. Липаев А.А. Теплофизические исследования в петрофизике. Изд-ство Казанского университета. Казань, 1993. 146 с.
3. Липаев А.А., Хисамов Р.С., Чугунов В.А. Теплофизика горных пород нефтяных месторождений. М.: НЕДРА, 2003. 304 с.
4. Кондратьев Г.М. Регулярный тепловой режим. М.: Гостоптехиздат, 1954. 408 с.
5. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 488 с.
6. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галёркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
7. Fomin S.A., Chugunov V.A. Mathematical modeling of mass transport in complex media. Sendai: Tohoku University Press, 2007. 257 p.
8. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. 524 с.
9. Липаев А.А., Шевченко Д.В., Чугунов В.А., Бурханов Р.Н. Геотепловое моделирование многослойных нефтяных пластов. М., Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2014. 236 с.

Поступила в редакцию 27.08.2018

Сведения об авторах

Чугунов Владимир Аркадьевич

д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой высшей математики и методики преподавания математики (ВИИМПМ) Московского городского педагогического университета, 129226, Москва, 2-й сельскохозяйственный проезд д.4, к.1

Email: chug@rambler.ru

Липаев Александр Анатольевич

д.т.н., профессор кафедры разработки и эксплуатации нефтяных и газовых месторождений (РиЭНГМ) Альметьевского государственного нефтяного института,

423450, Татарстан, г. Альметьевск, ул. Ленина 2,
Email: lipaevagni@yandex.ru

Королев Всеволод Алексеевич

аспирант 4-го года кафедры высшей математики и методики преподавания математики (ВМиМПМ) Московского городского педагогического университета.
129226, Москва, 2-й сельскохозяйственный проезд д.4, к.1

V.A. Chugunov, A.A. Lipaev, V.A. Korolyov

EVALUATION OF THE POSSIBILITY OF APPLYING A ONE-DIMENSIONAL SPACE OF THE MATHEMATICAL MODEL OF HEAT TRANSFER IN THE SYSTEM OF CONTACTING BODIES FOR DETERMINING THE THERMAL PROPERTIES OF MATERIALS

Abstract. The article is devoted to modeling the process of heat transfer by thermal conductivity in a system of three contacting bodies. Such a scheme is often used to determine the thermal properties of various materials. In this case, one-dimensional mathematical models are used to process experimental data, which do not always adequately describe the physics of the process. In this paper, a physical-mathematical model is formulated that takes into account the possible non-uniformity of the heat transfer process in the system under consideration. Its relationship with the previously known model is shown and an effective algorithm for implementing the constructed model is developed. As a result of the computational experiments, recommendations are given to eliminate the shortcomings of the previously known model. As a result of the computational experiments, recommendations are given to eliminate the shortcomings of the previously known model. This will improve the accuracy of determining the coefficients of thermal conductivity, thermal diffusivity, and heat capacity of materials.

Key words: mathematical model, heater, heat transfer, heat transfer, thermal conductivity coefficient, coefficient of thermal diffusivity, heat capacity, materials.

For citation: Chugunov V.A., Lipaev A.A., Korolyov V.A. [Evaluation of the possibility of applying a one-dimensional space of the mathematical model of heat transfer in the system of contacting bodies for determining the thermal properties of materials]. *Upravlenie texnosferoj*, 2018, vol. 1, iss.2, pp. 209 – 245 (in Russ.) Available at: <http://f-ing.udsu.ru/technosphere>

REFERENCES

1. Nikolaev S. A., Nikolaeva N.G., Salamatina A.N. *Teplofizika gorny`x porod*. Kazan`: KGU, 1987, 150 p. (in Russ.).

2. Lipaev A.A. *Teplofizicheskie issledovaniya v petrofizike*. Izd-tvo Kazanskogo universiteta. Kazan`, 1993. 146 p. (in Russ.).
3. Lipaev A.A., Xisamov R.S., Chugunov V.A. *Teplofizika gorny`x porod neftyany`x mestorozhdenij*. M.: NEDRA, 2003, 304 p. (in Russ.).
4. Kondrat`ev G.M. *Regulyarny`j teplovoj rezhim*. M.: Gostoptexizdat, 1954, 408 p. (in Russ.).
5. Karlsru G., Eger D. *Teploprovodnost` tverdyy`x tel*. M.: Nauka, 1964, 488 p. (in Russ.).
6. Fletcher K. *Chislenny`e metody` na osnove metoda Galyorkina*. M.: Mir, 1988, 352 p. (in Russ.).
7. Fomin S.A., Chugunov V.A. *Mathematical modeling of mass transport in complex media*. Sendai: Tohoku University Press, 2007, 257 p.
8. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Integral`ny`e preobrazovaniya i operacionnoe ischislenie*. M.: Gosudarstvennoe izdatel`stvo fiziko-matematicheskoy literatury`, 1961, 524 p. (in Russ.).
9. Lipaev A.A., Shevchenko D.V., Chugunov V.A., Burxanov R.N. *Geoteplovoe modelirovanie mnogoslujny`x neftyany`x plastov*. M., Izhevsk: Institute for Computer Research, 2014. 236 p. (in Russ.).

Received 27.08.2018

About the Authors

Chugunov Vladimir Arkadevich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics (VIIMPM), Moscow City Pedagogical University, 129226, Moscow, 2-nd Agricultural Passage, 4, building 1

Email: chug@rambler.ru

Lipaev Alexander Anatolievich

Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of Development and Operation of Oil and Gas Fields (RIENGM) Almetjevsk State Petroleum Institute, Tatarstan, Almetjevsk, ul. Lenina 2, Email:

lipaevagni@yandex.ru

Korolev Vsevolod Alekseevich

graduate student of the 4th year of the Chair of Higher Mathematics and Methods of Teaching Mathematics (VMiMPPM) of the Moscow City Pedagogical University. Moscow City Pedagogical University, 129226, Moscow, 2-nd Agricultural Passage, 4, building 1